Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.

I Endomorphismes trigonalisables

1) Premiers outils de réduction

Définition 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique polynôme unitaire π_u qui engendre l'idéal de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes annulateurs de u. On l'appelle polynôme minimal de u.

Définition 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique de u, noté χ_u, le polynôme défini par $\chi_u(X) = \det(u - Xid_E)$.

Théorème 3 (Cayley-Hamilton)**.** *Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0$.*

Définition 4. Les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$ sont appelées valeurs propres de u. On note $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda id_E)$ l'espace propre de u par rapport à λ.

Théorème 5 (Lemme des noyaux)**.** *Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_k$ dans $\mathbb{K}[X]$ tel que les P_i sont premiers entre eux deux à deux, alors :*

$$\mathrm{Ker}\, P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, P_i(u)$$

2) Définition et caractérisation

Définition 6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u)$ soit triangulaire supérieure.

Définition 7. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque 8. *Il est équivalent de dire qu'un endomorphisme est trigonalisable et que sa matrice dans une base l'est.*

Théorème 9. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :*

(i) u est trigonalisable

(ii) Il existe un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$.

(iii) Le polynôme minimal π_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

(iv) Le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire 10. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. La restriction de u à un sous-espace stable par u est encore trigonalisable.*

Corollaire 11. *Dans le cas où $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.*

Exemple 12. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *est $\mathbb{C}$-trigonalisable mais pas $\mathbb{R}$-trigonalisable.*

Corollaire 13. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ trigonalisable et $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ son spectre. Alors $\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.*

3) Trigonalisation simultanée

Proposition 14. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv = vu$. Alors :*

(i) Tout sous-espace propre de v est stable par u.

(ii) $\mathrm{Im}\, v$ est stable par u.

Théorème 15 (Triangulation simultanée)**.** *Soient $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(E)$ commutant entre eux deux à deux. On suppose que les u_i sont tous trigonalisables. Alors il existe une base de E dans laquelle les matrices des u_i sont toutes triangulaires supérieures. On dit alors que les u_i sont co-trigonalisables.*

Proposition 16. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent et sont trigonalisables, alors $u + v$ et uv sont trigonalisables.*

4) Propriétés topologiques

On considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 17. On note :

(i) $D_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ est diagonalisable}\}$

(ii) $T_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ est trigonalisable}\}$

(iii) $C_n(\mathbb{K}) = \{M \in D_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ a } n \text{ valeurs propres distinctes}\}$

Proposition 18. *Dans l'espace topologique $T_n(\mathbb{K})$, on a :*

(i) $\overline{C_n(\mathbb{K})} = T_n(\mathbb{K})$

(ii) $C_n(\mathbb{K}) = \overset{\circ}{D_n}(\mathbb{K})$

Proposition 19. *$T_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Proposition 20. *$C_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

II Endomorphismes nilpotents

1) Définition et caractérisation

Définition 21. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$. On note $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 22. *La dérivation $P \mapsto P'$ dans l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est nilpotente. Ceci est faux quand on considère la dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.*

Définition 23. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. On appelle indice de nilpotence de u le plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.

Remarque 24. *D'après le théorème de Cayley-Hamilton, l'indice de nilpotence de $u \in \mathcal{N}(E)$ est inférieur à n.*

Proposition 25. *Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ d'indice p. Il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ soit libre.*

Proposition 26. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :*

(i) *u est nilpotent.*

(ii) $\chi_u(X) = X^n$

(iii) $\pi_u(X) = X^p$ *avec* $p \in [\![1, n]\!]$

(iv) *u est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0.*

Dans ce cas, u est d'indice de nilpotence p.

Exemple 27. *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $\chi_A(X) = X(X^2-1)$. La seule valeur propre de A sur $\mathbb{R}$ est 0, mais A n'est pas trigonalisable.*

Proposition 28. *Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, alors u est nilpotent si, et seulement si, $\mathrm{tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.*

Exemple 29. *Si $\mathrm{car}\,\mathbb{K} = p > 0$, alors I_p vérifie la condition précédente sans être nilpotente pour autant.*

2) Structure de $\mathcal{N}(E)$

Proposition 30. *Si $u \in \mathcal{N}(E)$, alors $\lambda u \in \mathcal{N}(E)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que $\mathcal{N}(E)$ est un cône.*

Remarque 31. *$\mathcal{N}(E)$ n'est pas stable par addition. Ce n'est pas un idéal de $\mathcal{L}(E)$, ni même un sous-espace vectoriel.*

Exemple 32. $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *n'est pas nilpotente.*

Exemple 33. *Supposons E de dimension 2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors $\chi_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$. Donc M est nilpotente si, et seulement si, $\mathrm{tr}(M) = \det(M) = 0$. En écrivant $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, cela revient à $a = -d$ et $ad = bc$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut voir $\mathcal{N}(E)$ comme le cône d'équation $a^2 + bc = 0$ dans l'espace de dimension 3 des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

Proposition 34. *Soient $u, v \in \mathcal{N}(E)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.*

(i) *Si u et v commutent, alors $u + v \in \mathcal{N}(E)$.*

(ii) *Si u et f commutent, alors $uf = fu \in \mathcal{N}(E)$.*

III Applications à la réduction

1) Décomposition de Dunford

Proposition 35. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. Pour tout i, on note $N_i = \mathrm{Ker}\, M_i^{\alpha_i}(f)$. Alors :*

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$

(ii) *Pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.*

Théorème 36 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (n, d) d'endomorphismes tels que :*

(i) *d est diagonalisable, n est nilpotent*

(ii) *$f = d + n$ et n et d commutent*

De plus, d et n sont des polynômes en f

2) Réduction de Jordan pour les nilpotents

Définition 37. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle sous-espace caractéristique de u associé à λ l'espace $N_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)^\alpha$, où α est la multiplicité de λ dans χ_u.

Proposition 38. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
Supposons que $\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\pi_u = \prod_{i=1}^{\rho}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$, alors :

(i) $E = \bigoplus_{k=1}^{\rho} N_k$, $\dim_{\mathbb{K}} N_k = \alpha_k$, $N_k = Ker(u - \lambda_k Id_E)^{\beta_k}$

(ii) $(u - Id_E)|_{N_k}$ *est nilpotent d'indice* β_k.

(iii) N_k *est stable par* u *et* λ_k *est la seule valeur propre de* $u|_{N_k}$.

Lemme 39. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geqslant 1$. Pour tout $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $\mathcal{B}_{u,x} = (u^k(x))_{1 \leqslant k \leqslant q-1}$ est une famille libre de E et l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est u-stable.*

Théorème 40. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geqslant 1$. Alors il existe une base $\mathcal{B} = B_1 \cup \ldots \cup B_r$ de E telle que chaque s.e.v. $E_i = \mathrm{Vect}\,\mathcal{B}_i$ soit stable par u et que la matrice de $u|_{E_i}$ soit :*

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathbb{K}), \ \text{avec } q_i = \dim_{\mathbb{K}} E_i$$

Théorème 41. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ non nul tel que $\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\Pi_u = \prod_{i=1}^{\rho}(X-\lambda_i)^{\beta_i}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u soit de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_\rho \end{pmatrix}$$

avec pour tout $k \in [\![1, \rho]\!]$:

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k-1} & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K}), \ \text{où } \varepsilon_{k,i} \in \{0,1\}$$

Développements

- Décomposition de Dunford (35,36) [Gou94]
- Réduction de Jordan (par la dualité) (39,40,41) [Rom20]

Références

[Gri11] Joseph Grifone. *Algèbre Linéaire.* Cépaduès, 4e edition, 2011
[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation.* H&K, 2005
[Gou94] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e edition, 1994
[Rom20] Jean-Étienne Rombaldi. *Algèbre et Géométrie.* DeBoeck, 2020